Dagens 19/1

1. Undersök vilka av följande matriser beskriver en ON-transformation mellan två baser:

a. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ c. $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ d. $\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 2 & -11 & 10 \\ 14 & -2 & -5 \end{bmatrix}$

2. En linjär avbildnig har i basen **e** matrisen $\mathbf{A_e}$ och i basen **f** matrisen $\mathbf{A_f}$. Bestäm

a. $\mathbf{A_f}$ om $\mathbf{A_e} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{f} = \{\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2\}$.

b. $\mathbf{A_e}$ om $\mathbf{A_f} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{f} = \{\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2\}$.

c. $\mathbf{A_e}$ om $\mathbf{A_f} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{e} = \{\mathbf{f}_1 + 3\mathbf{f}_2, 2\mathbf{f}_1 + 4\mathbf{f}_2\}$.

d. $\mathbf{A_f}$ om $\mathbf{A_e} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{e} = \{\mathbf{f}_1 + 3\mathbf{f}_2, 2\mathbf{f}_1 + 4\mathbf{f}_2\}$

3. Bestäm egenvärden och egenvektorer till följande matriser:

a. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. Bestäm egenvärden och egenvektorer till följande matriser:

a. $\begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

5. **A** är matriseerna i uppgift 3. Undersök om **A** är diagonaliserbar. Om så är fallet bestäm en matris **C** som diagonaliserar matrisen **A** och ange $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$.

6. Undersök om man kan bilda en bas $\mathbf{R}^2$ bestående av egenvektorer till matrisen $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. Om så är fallet ange en sådan bas.

Svar

1. Endast matriser i c och d.
2. a. $\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$ b. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 15 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$ d. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 15 \end{bmatrix}$
3. a. $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3,\ \mathbf{v}_1 = (0,1),\ \mathbf{v}_2 = (1,2)$ b. $\lambda_1 = \lambda_2 = 4,\ \mathbf{v} = (3,2)$
   c. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \mathbf{v}_1 = (1,0),\ \mathbf{v}_2 = (0,1)$
4. a. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2,\ \mathbf{v}_1 = (1,-1,1),\ \mathbf{v}_2 = (1,0,2),\ \mathbf{v}_3 = (1,-1,0)$
   b. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0,\ \mathbf{v}_1 = (-1,1,0),\ \mathbf{v}_2 = (1,0,1),\ \mathbf{v}_3 = (1,1,1)$
   c. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1,\ \mathbf{v}_1 = (-2,-3,1),\ \mathbf{v}_3 = (1,1,0)$.
5. a. $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ b. Ej diagonaliserbar. c. $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
6. Det kan man inte.

Dagens 21/1

7. Vilka av följande matriser är ON-diagonaliserbara?

a. $\begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

8. Visa att matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar och bestäm $\mathbf{A}^{10}$.

9. Undersök om **A** är diagonaliserbar. Om så är fallet bestäm en matris **C** som diagonaliserar matrisen **A** och ange $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$

a. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ b. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ c. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. Skriv på huvudaxelform och bestäm vilken typ av kurva i $\mathbf{R}^2$ som ges av ekvationen

a. $6x^2 - 4xy + 9y^2 = 5$

b. $4xy + 3y^2 = 1$

c. $2y^2 + 4xy - x^2 = 1$

11. Beräkna arean innanför ellipsen $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 1$. Det anses känt att arean innanför ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ är lika med πab.

Svar:

7. b men inte a.

8. $\mathbf{A}^{10} = \begin{bmatrix} 512 & 512 & -512 \\ 511 & 513 & -512 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

9. a. T.ex $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. Ej diagonaliserbar.

c. T.ex $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

10. a. $2x^2 + y^2 = 1$, ellips b. $4x^2 - y^2 = 1$, hyperbel c. $3x^2 - 2y^2 = 1$ hyperbel.

11. $\pi/\sqrt{6}$